



В. И. АРНОЛЬД

ЛЕКЦИИ
ПО КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ
(19—24)

Часть IV-я

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА • 1967

Эти лекции были прочитаны на 2 курсе механико-математического факультета МГУ осенью 1966 года. Четвертый выпуск, как и третий, подготовлен к печати Н. Н. Колесниковым, а также Л. А. Бунимовичем и Л. Д. Вайнгортиным, которым я выражаю свою благодарность.

В. Арнольд

Движение в подвижной системе координат.

Часто бывает полезны подвижные системы координат $Q = Q(q, t)$

Чтобы записать уравнения движения в подвижной системе, достаточно выразить через новые координаты функцию Лагранжа:

ТЕОРЕМА. Если траектория $\gamma: q = q(t)$ уравнений Лагранжа $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$ записывается в локальных координатах Q, τ ($Q = Q(q, t)$, $\tau = \tau(q, t)$) в виде $\gamma: Q = Q(\tau)$ то функция $Q(\tau)$ удовлетворяет уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial L}{\partial Q}, \text{ где } \dot{Q} = \frac{dQ}{d\tau}, L(Q, \dot{Q}, \tau) = L(q, \dot{q}, t)$$

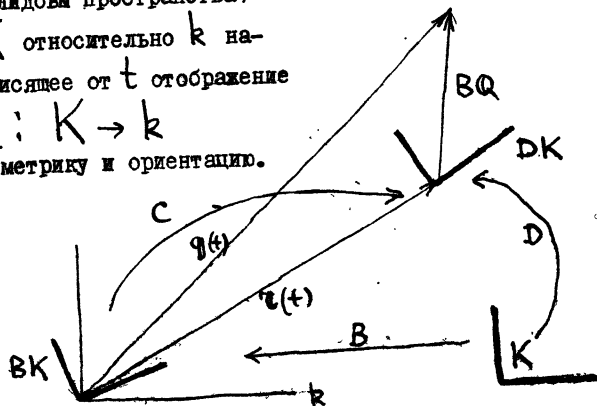
Доказательство. Траектория γ является экстремалью: $\delta \int L(q, \dot{q}, t) dt = 0$. Следовательно, $\delta \int L(Q, \dot{Q}, \tau) d\tau = 0$ и вдоль γ $Q(\tau)$ удовлетворяет уравнениям Лагранжа, что и требовалось доказать.

Рассмотрим, в частности, случай /важный/, когда q - декартов радиус-вектор точки относительно инерциальной системы координат k /которую мы будем называть "неподвижной"/, а Q - декартов радиус-вектор той же точки относительно "подвижной" системы координат K .

Определение. Пусть k, K - ориентированные линейные евклидовы пространства.

Движением K относительно k называется зависящее от t отображение

$D_t: K \rightarrow k$ сохраняющее метрику и ориентацию.



Определение. Движение D_t называется вращением,
ли оно переводит начало координат K в начало координат k , т.е. если D_t -линейный оператор.

ТЕОРЕМА. Всякое движение D_t однозначно разлагается в произведение вращения $B_t: K \rightarrow k$ и сдвига $C_t: k \rightarrow k$

$$D_t = C_t B_t,$$

где $C_t q = q + z(t)$, $(q, z \in k)$.

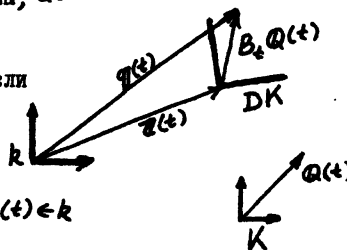
Доказательство. Положим $z(t) = D_t O$, $B_t = C_t^{-1} D_t$.

Тогда $B_t O = O$, что и тр. док.

Определение. Движение D_t называется поступательным, если соответствующее ему отображение $B_t: K \rightarrow k$ от t не зависит: $B_t = B_0 = B$, $D_t Q = B Q + z(t)$.

Мы будем называть k неподвижной системой координат, K -подвижной, $q(t) \in k$ радиус-вектором движущейся точки относительно неподвижной системы; $Q(t)$ называется радиус-вектором точки относительно подвижной системы, если

$$(1) \quad q(t) = D_t Q(t) = B_t Q(t) + z(t)$$



Предостережение. Вектор $B_t Q(t) \in k$ не следует путать с $Q(t) \in K$ - они лежат в разных пространствах!

Выразим теперь "абсолютную скорость" $\dot{q}$ через относительное движение $Q(t)$ и движение системы координат D_t . Из формулы (1) находим, дифференцируя по t

$$(2) \quad \dot{q} = \dot{B} Q + B \dot{Q} + \dot{z}$$

Чтобы выяснить смысл входящих в (2) трех слагаемых рассмотрим вначале частные случаи.

Случай поступательного движения. ($\dot{B} = 0$). В этом случае уравнение (2) дает $\dot{q} = B\dot{Q} + \dot{z}$. Иначе говоря, доказана

ТЕОРЕМА. Если подвижная система K движется относительно k поступательно, то абсолютная скорость равна сумме относительной скорости и скорости движения системы K :

$$(3) \quad v = v' + v_0 \quad \text{где}$$

$v = \dot{q} \in k$ - абсолютная скорость

$v' = B\dot{Q} \in k$ - относительная скорость (не путать с $\dot{Q} \in K$!)

$v_0 = \dot{z}$ - скорость движения подвижной системы координат.

В случае вращения системы K связь между относительной и абсолютной скоростями не столь проста. Рассмотрим сначала случай, когда наша точка покоится относительно K (т.е. $\dot{Q} = 0$), а система координат K вращается (т.е. $\dot{z} = 0$). В этом случае движение $q(t)$ называется переносным вращением.

Пример. Вращение с постоянной угловой скоростью $\omega \in k$.
Пусть $U(t): k \rightarrow k$ - поворот пространства k вокруг оси ω на угол $|\omega|t$. Тогда $B(t) = U(t)B(0)$ называется равномерным вращением K с угловой скоростью ω .

Очевидно, в этом случае скорость переносного движения точки q дается формулой

$$\dot{q} = [\omega, q]$$



Вернемся теперь к общему случаю вращения $K (\tau = \dot{a} = 0)$

ТЕОРЕМА. В каждый момент времени t существует вектор $\omega(t) \in k$, через который переносная скорость выражается по формуле

$$(4) \quad \dot{q} = [\omega, q] \quad \forall q \in k$$

Вектор ω называется мгновенной угловой скоростью; очевидно, он определен равенством (4) однозначно.

Следствие. Пусть твердое тело K вращается вокруг неподвижной точки O пространства k . Тогда в каждый момент времени существует мгновенная ось вращения — такая прямая в теле, проходящая через O , что скорости ее точек в данный момент равны 0 . Скорости остальных точек перпендикулярны этой прямой и пропорциональны расстоянию до нее.

Мгновенная ось вращения в пространстве k задается своим вектором ω ; в K соответствующий вектор обозначается через $\Omega = B^{-1}\omega \in K$; Ω называется вектором угловой скорости в теле.

Пример. Угловая скорость Земли направлена от центра к северному полюсу и равна $\frac{2\pi}{3600 \cdot 24} \text{ сек}^{-1} \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1}$.

Доказательство теоремы. Согласно (2) имеем

$$\dot{q} = \dot{B}\Omega$$

Поэтому, если мы выразим Ω через q , получим

$\dot{q} = \dot{B}B^{-1}q = Aq$, где $A = \dot{B}B^{-1}: k \rightarrow k$ — линейный оператор из k в k .

ЛЕММА. Оператор A — кососимметрический: $A' + A = 0$.

6/

Доказательство леммы. Введем ортогональный оператор

U из k в k , полагая $U(t, \tau) = B(t + \tau) B^{-1}(\tau)$.

Этот оператор при $\tau = 0$ обращается в E , и его производная по τ при $\tau = 0$ есть $A(-t)$.

Будем обозначать точкой производную по t . Тогда из $UU' = E$ вытекает $\dot{U}U' + U\dot{U}' = 0$. Но так как при $\tau = 0$ имеем $U = U' = E$, $\dot{U} = A$, $\dot{U}' = A'$, то

$A + A' = 0$, что и доказывает лемму.

В декартовых координатах оператор A задается кососимметрической матрицей; обозначим ее элементы через $\pm \omega_{1,2,3}$:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{vmatrix}$$

При таком обозначении элементов вектор $\omega = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3$ будет собственным с собственным значением 0. Применяя A к вектору $q = q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$ получаем непосредственной выкладкой

$$Aq = [\omega, q]$$

что и доказывает теорему.

Случай чистого вращательного движения. Пусть теперь система K вращается ($\tau = 0$), а точка в системе K движется ($\dot{Q} \neq 0$). Из (2) находим

$$\dot{q} = \dot{B}Q + B\dot{Q} = [\omega, q] + v'$$



Иначе говоря, доказана

ТЕОРЕМА. Если подвижная система K

вращается относительно $O \in k$, то абсолютная скорость равна

сумме относительной и переносной скорости вращения:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}' + \mathcal{V}_n, \text{ где}$$

$$(5) \mathcal{V} = \dot{q} \in k \quad \text{— абсолютная скорость}$$

$$\mathcal{V}' = \dot{B}Q \in k \quad \text{— относительная скорость}$$

$$\mathcal{V}_n = \dot{B}Q = [\omega, q] \in k \quad \text{— переносная скорость вращения.}$$

Наконец, общий случай можно свести к двум предыдущим, рассматривая вспомогательную подвижную систему K_1 движущуюся поступательно относительно k и относительно которой K движется, вращаясь вокруг $O \in K_1$. Можно также и из формулы (2) усмотреть, что

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}' + \mathcal{V}_n + \mathcal{V}_0.$$

где

$$\mathcal{V} = \dot{q} \in k \quad \text{— абсолютная скорость}$$

$$\mathcal{V}' = \dot{B}Q \in k \quad \text{— относительная скорость}$$

$$\mathcal{V}_n = \dot{B}Q = [\omega, q - z] \quad \text{— переносная скорость вращения}$$

$$\mathcal{V}_0 = \dot{z} \quad \text{— скорость движения подвижной системы координат.}$$

Задача. Покажите, что угловая скорость твердого тела не зависит от выбора начала координат подвижной системы K в теле.

Задача. Покажите, что самое общее перемещение твердого тела есть винтовое перемещение, т.е. произведение поворота на угол φ вокруг некоторой оси и сдвига на h вдоль нее.

ЛЕКЦИЯ 20. Силы Инерции. Сила Кориолиса.

Мы доказали в прошлой лекции, что уравнения движения в подвижной системе координат K имеют вид уравнений Лагранжа, и можем теперь выразить функцию Лагранжа через подвижные координаты Q . Рассмотрим вначале поступательно движущуюся систему координат K , и пусть, как в прошлой лекции, начало K в инерциальной системе k имеет радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$.

ТЕОРЕМА. В подвижной системе координат движение происходит так, как если бы она была инерциальной, но на каждую точку массы m действовала дополнительная "сила инерции".
$$\mathbf{F} = -m\mathbf{w} \quad , \quad \text{где } \mathbf{w} = \mathbf{B}\mathbf{W} = \ddot{\mathbf{z}} \quad - \text{ускорение системы } K.$$

Действительно, выразим функцию Лагранжа через $Q, \dot{Q}, t$.
Имеем (рассматриваем, для простоты, одну материальную точку)

$$L = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 - U(q)$$

Но согласно формулам (3) прошлой лекции

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \dot{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{B}\dot{Q}$$

откуда, обозначая $\mathbf{r} = \mathbf{B}\mathbf{R}$,

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}'^2 + 2\mathbf{v}'\dot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{z}}^2 = \dot{Q}^2 + 2\dot{R}\dot{Q} + \dot{\mathbf{z}}^2 = \dot{Q}^2 + 2\frac{d}{dt}(\dot{R}Q) - 2\ddot{R}Q + \dot{\mathbf{z}}^2$$

$$\text{или } L = \frac{m}{2} \dot{Q}^2 - m\mathbf{W}Q - U(D_t Q) + \frac{d}{dt} F(Q, t)$$

$$\text{где } F(Q, t) = m\dot{R}Q + m\int \dot{\mathbf{z}}^2 dt, \quad \mathbf{W} = \ddot{R}.$$

ЛЕММА. Прибавление к функции Лагранжа полной производной $\frac{d}{dt} F(Q, t)$ функции Q и t не влияет на уравнения Лагранжа.

Действительно, при таком изменении функции Лагранжа все интегралы $\int_{t_0}^{t_1} L dt$ изменяется на одинаковое слагаемое (равное приращению $F(Q_1, t_1) - F(Q_0, t_0)$), и потому экстремали не изменятся. Лемма доказана.

Итак, в координатах Q движение описывается функцией Лагранжа

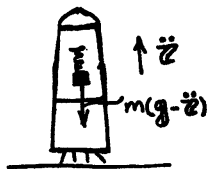
$$L = \frac{m}{2} \dot{Q}^2 - U(D_t Q) - mWQ$$

Дополнительное слагаемое $-mWQ$ и дает однородное силовое поле $F = -mW$. Теорема доказана.

Пример 1. Ракета при старте имеет направленное вверх ускорение $\ddot{z}$. В соответствии с этим, система координат

K , связанная с ракетой, не инерциальна, и наблюдатель, находящийся внутри,

может обнаружить появление силового поля $-mW$, и измерить силы инерции, например, пружинными весами. В этом случае сила инерции называется перегрузкой.



Пример 2. При прыжке с вышки прыгун имеет ускорение g направленное вниз. В соответствии с этим сумма сил инерции и веса равна 0; пружинные весы показывают, что вес любого предмета равен 0, поэтому такое состояние называется невесомостью. Точно так же при свободном баллистическом полете спутника наблюдается невесомость, так как (сила инерции) =

• = (силе притяжения Земли).

Пример 5. Если точка подвеса маятника движется с ускорением $W(t)$, то маятник движется так, как если бы ускорение силы тяжести g было переменным и равным $g - W(t)$.

перейдем теперь к более сложному случаю вращающейся системы координат. По формулам (5) прошлой лекции

$$V = V' + [\omega, q] = B(\dot{Q} + [\Omega, Q])$$

(здесь $q = BQ$, $\omega = B\Omega$, $V' = B\dot{Q}$, и $[B\Omega, BQ] = B[\Omega, Q]$, так как B сохраняет векторное произведение).

поэтому функция Лагранжа имеет вид (снова для простоты взята 1 точка)

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - U = \frac{m}{2} \dot{Q}^2 + m\dot{Q}[\Omega, Q] + \frac{m}{2} [\Omega, Q]^2 - U(BQ)$$

Чтобы записать уравнения Лагранжа, составим дифференциал L по Q и $\dot{Q}$:

$$dL = m\dot{Q}d\dot{Q} + m[\Omega, Q]d\dot{Q} + m\dot{Q}[\Omega, dQ] + m[\Omega, Q][\Omega, dQ] - \frac{\partial U}{\partial Q} dQ$$

Итак, ввиду $(q[t, c]) = ([a, b], c)$, находим

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = m\dot{Q} + m[\Omega, Q], \quad \frac{\partial L}{\partial Q} = m[\dot{Q}, \Omega] + m[\Omega, Q, \Omega] - \frac{\partial U}{\partial Q}$$

Значит уравнение Лагранжа будет

$$\frac{d}{dt}(m\dot{Q} + m[\Omega, Q]) = m[\dot{Q}, \Omega] + m[\Omega, Q, \Omega] - \frac{\partial U}{\partial Q}$$

или окончательно

$$m\ddot{Q} = -\frac{\partial U}{\partial Q} - m[\dot{\Omega}, Q] + 2m[\dot{Q}, \Omega] + m[\Omega, Q, \Omega]$$

Итак, доказана

ТЕОРЕМА. Во вращающейся системе координат движение происходит так, как если бы система была инерциальной, но на каждую движущуюся точку Q массы m действовали бы три дополнительные "силы инерции".

Сила инерции вращения $-m[\dot{\Omega}, Q]$

Сила Кориолиса $2m[\dot{Q}, \Omega]$

Центробежная сила $m[[\Omega, Q], \Omega]$

Первая сила наблюдается лишь в случае неравномерного вращения; Вторая и третья присутствуют и при равномерном вращении.

Центробежная сила направлена всегда от мгновенной оси вращения Ω , и равна по величине $|\Omega|^2 \rho$, где ρ — расстояние до этой оси.

Сила Кориолиса зависит от скорости $\dot{Q}$. В северном полушарии Земли она отклоняет всякое движущееся по Земле тело вправо, а падающее — на восток.



Рассмотрим подробнее влияние вращения Земли на лабораторные эксперименты. Так как Земля вращается практически равномерно, можно считать $\dot{\Omega} = 0$. Центробежная сила наибольшее значение имеет на экваторе, где она достигает $\frac{\Omega^2 \rho}{g} \approx \frac{(7.3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6.4 \cdot 10^6}{9.8} \approx \frac{3}{1000}$ веса. Однако в пределах лаборатории она меняется мало, и потому для ее наблюдения приходится путешествовать.

В соответствии со сказанным в системе координат Q , связанных с Землей, в пределах лаборатории с большой точностью

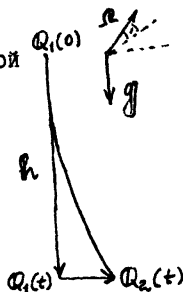
$$\frac{d}{dt} m \dot{Q} = m g + 2 m [\dot{Q}, \Omega]$$

(центробежная сила учтена в g).

Пример. Камень брошен (без начальной скорости) в шахту глубиной 250м на широте ленинграда ($\lambda = 60^\circ$). На сколько он отклонится от вертикали?

Решаем уравнение

$$\ddot{Q} = g + 2[\dot{Q}, \Omega]$$



последовательными приближениями, учитывая, что $\Omega \ll 1$.

Положим

$$Q = Q_1 + Q_2, \text{ где } \dot{Q}_2(0) = Q_2(0) = 0, \text{ а } Q_1 = Q_1(0) + \frac{gt^2}{2}$$

для Q_2 получим тогда

$$\ddot{Q}_2 = 2[g\dot{t}, \Omega] + O(\Omega^2) \quad Q_2 \approx \frac{t^3}{3} [g, \Omega] \approx \frac{2t}{3} [h, \Omega], \quad h = \frac{gt^2}{2}$$

Отсюда видно, что камень отклонится на Восток, примерно на

$$\frac{2t}{3} |h| |\Omega| \cos \lambda \approx \frac{2 \cdot 7}{3} \cdot 250 \cdot 7 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{2} \text{ м} \approx 4 \text{ см}$$

Задача. На сколько сила Кориолиса отклонит от падения в жерло пущенный вертикально вверх в ленинграде снаряд, если он поднялся на 1 км?

МАЯТНИК ФУКО

Рассмотрим малые колебания математического маятника с учетом силы Кориолиса. Пусть оси e_x, e_y, e_z системы координат, связанной с землей, направлены: e_z - вверх,

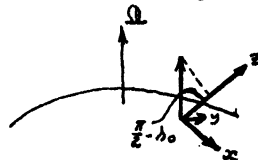
e_x, e_y — в горизонтальной плоскости. В приближении малых колебаний $\dot{z} = 0$ (по сравнению с $\dot{x}, \dot{y}$), поэтому сила Кориолиса будет $2m\dot{y}\Omega_z e_x - 2m\dot{x}\Omega_z e_y$. Отсюда получаем уравнения движения

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\omega^2 x + 2\dot{y}\Omega_z \\ \ddot{y} &= -\omega^2 y + 2\dot{x}\Omega_z\end{aligned} \quad (\Omega_z = |\Omega| \sin \lambda_0, \text{ где } \lambda_0 - \text{широта})$$

Если положить $x + iy = w$, то $\dot{w} = \dot{x} + i\dot{y}$, $\ddot{w} = \ddot{x} + i\ddot{y}$, и 2 уравнения сводятся к одному комплексному

$$\ddot{w} + i2\Omega_z \dot{w} + \omega^2 w = 0$$

Решаем его: $w = e^{\lambda t}$



$$\lambda^2 + 2i\Omega_z \lambda + \omega^2 = 0, \quad \lambda = -i\Omega_z \pm i\sqrt{\Omega_z^2 + \omega^2}$$

Но $\Omega_z^2 \ll \omega^2$. Поэтому $\sqrt{\Omega_z^2 + \omega^2} = \omega + O(\Omega_z^2)$

откуда, пренебрегая Ω_z^2 ,

$$\lambda \approx -i\Omega_z \pm i\omega$$

или, с той же точностью

$$w = e^{-i\Omega_z t} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t})$$

При $\Omega_z = 0$ получаются обычные гармонические колебания сферического маятника. Мы видим, что влияние силы Кориолиса приводит к вращению всей картины с угловой скоростью $-\Omega_z$, где $|\Omega_z| = |\Omega| \sin \lambda_0$

В частности, если начальные условия соответствуют плоскому движению ($\chi(0) = \dot{\chi}(0) = 0$), то плоскость качаний будет поворачиваться с угловой скоростью $-\Omega_2$. Относительно Земной системы координат.

На полюсе плоскость качаний за сутки совершает один оборот (и неподвижна относительно неврещающей с Землей системы координат). На широте Москвы (56°) за сутки плоскость качаний повернется на 0,83 оборота, т.е. за час - на 125° .



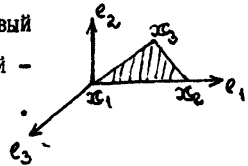
ЛЕКЦИЯ 21. Твердое тело.

Определение. Твердым телом называется система материальных точек, стесненных голономной связью, выражающейся в том, что расстояния между точками постоянны:

$$(I) \quad |x_i - x_j| = r_{ij} = \text{const}$$

ТЕОРЕМА. Конфигурационное пространство твердого тела есть 6-мерное многообразие, а именно $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ - прямое произведение трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ и группы $SO(3)$ его вращений, если только в теле есть 3 точки не на одной прямой.

Доказательство. Пусть x_1, x_2 и x_3 - три точки тела, не лежащие на прямой. Рассмотрим правый ортонормированный репер, у которого первый вектор направлен как $x_2 - x_1$, а второй - в сторону x_3 в плоскости x_1, x_2, x_3 .



Из условий $|x_i - x_j| = r_{ij} \quad (i=1,2,3)$

следует, что положение всех точек тела

однозначно определено положением x_1, x_2, x_3

последнее же задано положением репера.

Наконец, пространство реперов в $\mathbb{R}^3$ есть $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$, так как каждый репер получается из фиксированного вращением и сдвигом.

Задача. Найти конфигурационное пространство твердого тела, все точки которого лежат на прямой. Ответ. $\mathbb{R}^3 \times S^2$.

Определение. Твердое тело с неподвижной точкой O есть

система материальных точек, стесненных кроме связей (I) связью $\mathcal{H}_1 = 0$.

Очевидно, его конфигурационное пространство — трехмерная группа вращений $SO(3)$.

Рассмотрим задачу о движении свободного твердого тела по инерции, вне силовых полей. Примером (приблизительно) может служить кувыркание космического аппарата.

Система допускает все поступательные перемещения: они не меняют функцию Лагранжа. По теореме Нетер существуют 3 первых интеграла: 3 компоненты вектора количества движения. Или, иначе, доказана

ТЕОРЕМА. При свободном движении твердого тела его центр инерции движется равномерно и прямолинейно.

Но тогда мы можем рассмотреть инерциальную систему координат, в которой центр инерции неподвижен. Итак, получено

Следствие. Свободное твердое тело вращается около центра инерции, так, как если бы центр инерции был закреплен в неподвижной точке O .

Тем самым задача сведена к задаче с 3 степенями свободы о движении твердого тела вокруг неподвижной точки O . Исследуем подробнее эту задачу (не обязательно предполагая, что O есть центр инерции тела).

Функция Лагранжа выдерживает все вращения вокруг точки O . По теореме Нетер существуют 3 соответствующих первых интеграла: 3 компоненты вектора кинетического момента. Сохраняется также полная энергия системы $E = T$ (она сводится здесь к кинетической).

Итак, доказана

ТЕОРЕМА. В задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки O в отсутствии внешних сил имеется 4 первых интеграла M_x, M_y, M_z, E . Из этой теоремы можно без всяких вычислений получить качественные выводы о движении.

Положение и скорость тела определяется точкой 6-мерного многообразия $TSO(3)$. касательного пучка к конфигурационному пространству $SO(3)$. Первые интегралы M_x, M_y, M_z, E суть 4 функции на многообразии $TSO(3)$ размерности 6. Можно проверить, что в общем случае (если тело не обладает особой симметрией) эти 4 функции независимы. Поэтому 4 уравнения

$$M_x = C_1, M_y = C_2, M_z = C_3, E = C_4 > 0$$

определяют двумерное подмногообразие V_C в 6-мерном многообразии $TSO(3)$.

Это многообразие инвариантно: если начальные условия движения задают точку на многообразии V_C , то во все время движения точка $TSO(3)$, соответствующая положению и скорости тела, остается на V_C .

Поэтому многообразие V_C допускает касательное векторное поле (а именно, поле скоростей движения на $TSO(3)$). при $C_4 > 0$ это поле не может иметь особых точек. Далее, легко проверить, что V_C компактно (использовать E) и ориентируемо (т.к. $TSO(3)$ ориентируемо).

В топологии доказывалось, что все ориентируемые компактные двумерные многообразия суть сферы с n ручками

$$n \geq 0 : \quad S^2, \quad n=1 \text{ (тор) } = \text{тор}, \quad n=2 \text{ (два тора) }, \quad n=3 \text{ (три тора) }$$

Из них только тор ($n=1$) допускает касательное векторное поле без особых точек.

Итак, инвариантное многообразие V_c есть двумерный тор.

Мы увидим в дальнейшем, что на этом торе можно так выбрать угловые координаты $\varphi_1, \varphi_2 \pmod{2\pi}$, что движение изолирующей точки по V_c будет задаваться уравнениями

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1(c),$$

иными, словами, вращение твердого тела представляет собой наложение двух периодических движений с разными, вообще говоря, периодами: если частоты ω_1 и ω_2 несоизмеримы, то тело никогда не возвращается к пройденному состоянию движения (величины частот ω_1 и ω_2 зависят от начальных условий c).

Перейдем теперь к количественной теории, и введем следующие обозначения. Пусть k — неподвижная, K — вращающаяся вместе с телом вокруг точки O система координат: в ней тело покоится. Каждый вектор в пространстве K переводится в пространство k оператором B . Соответствующие вектора пространств K и k мы будем обозначать одинаковыми буквами: прописными для K , строчными для k . Так, например,

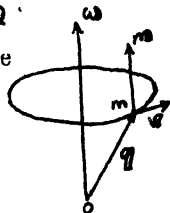
$q \in k$ радиус-вектор точки в пространстве

$Q \in K$ ее же радиус-вектор в теле, $q = BQ$.

$v = \dot{q} \in k$ — вектор скорости точки в пространстве

$V \in K$ — тот же вектор в теле, $v = BV$.

$\omega \in k$ — угловая скорость в пространстве.



$\Omega \in K$ —угловая скорость в теле, $\omega = B\Omega$

$m \in k$ —кинетический момент в пространстве

$M \in K$ —кинетический момент в теле, $m = BM$.

Так как оператор $B: K \rightarrow k$ сохраняет метрику и ориентацию, он сохраняет скалярные и векторные произведения.

По определению угловой скорости (см. лекцию I9)

$$\omega = [\omega, q]$$

По определению кинетического момента точки массы m относительно ω

$$m = [q, m\omega] = m[q, [\omega, q]]$$

Итак,

$$M = m[Q[\Omega, Q]]$$

Возникает линейный оператор, переводящий Ω в M

$$A: K \rightarrow K, \quad A\Omega = M$$

Этот оператор зависит еще от точки тела (Q) и ее массы m .

ЛЕММА. Оператор A симметрический.

Доказательство. При любых $X \in K, Y \in K$ имеем ввиду $([a, b], c) = (c, [a, b])$

$$(AX, Y) = m([Q, [X, Q]], Y) = m([Y, Q], [X, Q])$$

что, очевидно симметрично относительно X и Y . лемма доказана.

Подставляя вместо X и Y вектор угловой скорости Ω , и замечая, что $[Q, Q]^2 = \Omega^2 = \omega^2$, получаем

Следствие. Кинетическая энергия точки тела есть квадратичная форма относительно вектора угловой скорости Ω , а именно

$$T = \frac{1}{2} (A\Omega, \Omega) = \frac{1}{2} (M, \Omega)$$

Симметрический оператор A называется оператором (или тензором) инерции точки Q .

Если тело состоит из многих точек Q_i с массами m_i , то, суммируя, получаем:

ТЕОРЕМА. Кинетический момент M твердого тела относительно неподвижной точки O линейно зависит от угловой скорости Ω , т.е. существует линейный оператор $A: K \rightarrow K$,

$$A\Omega = M$$

оператор A симметричен. Кинетическая энергия тела есть квадратичная форма относительно угловой скорости Ω

$$T = \frac{1}{2} (A\Omega, \Omega) = \frac{1}{2} (M, \Omega)$$

Доказательство. по определению, кинетический момент тела равен сумме моментов его точек:

$$M = \sum_i M_i = \sum_i A_i \Omega = A\Omega, \text{ где } A = \sum_i A_i$$

Так как оператор инерции каждой точки A_i по лемме симметрический, оператор A также симметрический. Для кинетической энергии, по определению, получаем

$$T = \sum_i T_i = \sum_i \frac{1}{2} (M_i, \Omega) = \frac{1}{2} (M, \Omega) = \frac{1}{2} (A\Omega, \Omega)$$

Теорема доказана.

Определение. Симметрический оператор $A: K \rightarrow K$ переводящий вектор угловой скорости Ω в вектор момента M , называется оператором (или тензором) инерции тела.

Как всякий симметрический оператор, A имеет три взаимно-ортогональных собственных направления. Пусть $e_1, e_2, e_3 \in K$ — их орты, I_1, I_2, I_3 — собственные числа. В описании оператора инерции и кинетическая энергия имеют особенно простой вид:

$$M_i = I_i \Omega_i, \quad T = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2)$$

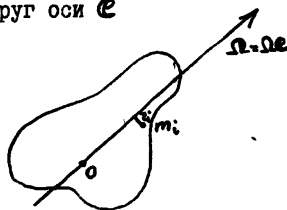
Оси e_i называются осями инерции тела в точке O .

Конечно, если не все числа I_1, I_2, I_3 различны, то оси инерции e_i определены неоднозначно. Выясним подробнее смысл собственных чисел I_1, I_2, I_3 .

ТЕОРЕМА. При вращении твердого тела вокруг O с угловой скоростью $\Omega = \Omega e$, ($\Omega = |\Omega|$) вокруг оси e кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} I_e \Omega^2, \quad \text{где } I_e = \sum_i m_i z_i^2$$

и z_i означает расстояние i -й точки до оси e .



Доказательство. По определений

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2, \quad \text{но } |v_i| = \Omega z_i, \quad \text{поэтому } T = \frac{1}{2} (\sum_i m_i z_i^2) \Omega^2, \quad \text{что и тр. доказать.}$$

Число I_e зависит от направления e оси вращения Ω в теле.

Определение. I_e называется моментом инерции тела относительно оси e :

$$I_e = \sum_i m_i r_i^2.$$

Сравнивая два полученных выражения для T , получаем

Следствие. Собственные числа I_i оператора инерции A суть моменты инерции тела относительно осей инерции e_i .

Чтобы изучить зависимость I_e от направления оси e в теле, рассмотрим вектора $\frac{e}{\sqrt{I_e}}$ (e пробегает единичную сферу).

ТЕОРЕМА. Вектора $\frac{e}{\sqrt{I_e}}$ образуют эллипсоид в K .

Доказательство. Если $T = \frac{1}{2}(A\Omega, \Omega)$, то квадратичная форма $T = \frac{1}{2}(A\Omega, \Omega)$ равна $\frac{1}{2}$. Поэтому $\{\Omega\}$ есть множество уровня положительно-определенной квадратичной формы, т.е. эллипсоид. Можно сказать, что эллипсоид этот составлен из векторов угловой скорости Ω для которых кинетическая энергия равна $\frac{1}{2}$.

Определение. Эллипсоид $\{\Omega : (A\Omega, \Omega) = 1\}$ называется эллипсоидом инерции тела в точке O .

В осях инерции e_i его уравнение имеет вид

$$I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2 = 1$$



Итак, главные оси эллипсоида инерции направлены по осям инерции, а их длины обратно пропорциональны $\sqrt{I_i}$.

Замечание. Если тело вытянуто вдоль какой-нибудь оси, то момент инерции относительно этой оси мал, следовательно, эллипсоид инерции тоже вытянут вдоль этой оси, так что эллип-

сойд инерции повторяет некоторые черты тела.

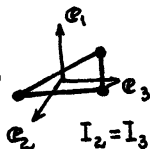
Если тело имеет проходящую через O ось симметрии порядка K (так что оно совмещается с собой при повороте вокруг нее на $\frac{2\pi}{K}$), то и эллипсоид инерции имеет такую же симметрию относительно этой оси. Но у трехосных эллипсоидов не бывает осей симметрии порядка $K > 2$.

Поэтому всякая ось симметрии порядка $K > 2$ есть ось вращения эллипсоида инерции, и, следовательно, его главная ось.

Пример. Эллипсоид инерции трех точек массы m в вершинах равностороннего треугольника относительно центра O есть эллипсоид вращения вокруг нормали к плоскости треугольника.

Если же имеется несколько таких осей, то эллипсоид инерции - шар, и любая ось - главная.

Задача. Провести через центр куба прямую так, чтобы сумма квадратов ее расстояний от вершин куба была а) наибольшей б) наименьшей.



Заметим теперь, что эллипсоид инерции (или оператор инерции, или моменты инерции I_1, I_2, I_3) полностью определяют вращательные свойства нашего тела: если мы рассмотрим два тела с одинаковыми эллипсоидами инерции, то, при одинаковых начальных условиях, они будут двигаться одинаково (т.к. у них одинаковая функция Лагранжа, $L = T$).

Итак, пространство всех твердых тел, с точки зрения динамики вращения вокруг O , трехмерно, из скольких бы точек тело не состояло.

Мы можем даже рассматривать "сплошное твердое тело плотности $\rho(Q)$ ", имея в виду предел при $\Delta Q \rightarrow 0$ последовательности тел из конечного

числа точек Q_i с массами $p(Q_i)\Delta Q_i$
или, что сводится к тому же, любое
тело с моментами инерции



$$I_e = \iiint p(Q) z^2(Q) dQ$$

z - расстояние от Q
до оси e .

Пример. Найти оси и моменты инерции однородной плоской
пластинки $|x| < a$, $|y| < b$, $z = 0$ относительно 0.

Решение. Так как пластинка имеет 3 плоскости симметрии,
эллипсоид инерции имеет те же плоскости симметрии и значит
оси инерции x, y, z . Далее,

$$I_x = \int_{-a}^a \int_{-b}^b x^2 p dx dy = \frac{ma^2}{3}, \text{ точно также } I_y = \frac{mb^2}{3};$$

очевидно, $I_z = I_x + I_y$.

Задача. Доказать, что моменты инерции любого тела удов-
летворяют неравенствам треугольника

$$I_3 \leq I_2 + I_1, \quad I_2 \leq I_1 + I_3, \quad I_1 \leq I_2 + I_3$$

причем равенство может иметь место ^{только} для плоского тела.

Задача. Найти ^иоси ^имоменты инерции однородного эллипсоида
массы m с полуосями a, b, c относительно центра 0.

Указание. Рассмотрите сначала шар.

Задача. Доказать теорему Штейнера: Моменты инерции любого
твердого тела относительно двух параллельных осей, одна из ко-
торых проходит через центр инерции, связаны соотношением

$$I = I_0 + m z^2$$

где m — масса тела, z — расстояние между осями, I_0 — момент инерции относительно оси, проходящей через центр инерции.

Таким образом, момент инерции относительно оси, проходящей через центр инерции, меньше момента инерции относительно любой параллельной оси.

Задача. Найти оси и моменты инерции однородного тетраэдра относительно его вершины.

УРАВНЕНИЯ Эйлера. ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПО ШАНСО.

Рассмотрим снова движение твердого тела вокруг неподвижной точки O , и пусть $\mathbf{M}$ — вектор кинетического момента тела относительно O в теле, $\boldsymbol{\Omega}$ — вектор угловой скорости в теле, $\mathbf{A}$ — оператор инерции ($\mathbf{A}\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{M}$) ; вектора $\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{M}$ принадлежат подвижной системе координат K (лекция 19). Вектор кинетического момента тела относительно O в пространстве, $\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{M}}$, сохраняется при движении (начало лекции 21).

Значит вектор $\mathbf{M}$ в теле ($\mathbf{M} \in K$) должен двигаться, так, чтобы вектор $\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{B}_* \dot{\mathbf{M}}(t)$ при изменении t не менялся.

ТЕОРЕМА. Имеет место соотношение

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\mathbf{M}, \boldsymbol{\Omega}] \quad (I)$$

Доказательство. Применим формулу (5) для скорости движения относительно неподвижного пространства k "точки" $\mathbf{M}(t) \in K$. получаем

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{M}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{m}] = \mathbf{B}(\dot{\mathbf{M}} + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{M}])$$

Но так как момент относительно пространства, $\dot{\mathbf{m}}$, сохраняется, $\dot{\mathbf{m}} = 0$, т.е. $\dot{\mathbf{M}} + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{M}] = 0$, что и требовалось доказать.

Соотношение (I) называется уравнением Эйлера. Так как $\mathbf{M} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}$, (I) можно рассматривать как дифференциальное уравнение, относительно $\mathbf{M}$ (или относительно $\boldsymbol{\Omega}$). Если

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_1 \mathbf{e}_1 + \Omega_2 \mathbf{e}_2 + \Omega_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{M} = M_1 \mathbf{e}_1 + M_2 \mathbf{e}_2 + M_3 \mathbf{e}_3$$

разложения Ω и M по осям инерции в O , то $M_i = I_i \Omega_i$

и (I) принимает вид

$$\frac{dM_1}{dt} = a_1 M_2 M_3, \quad \frac{dM_2}{dt} = a_2 M_3 M_1, \quad \frac{dM_3}{dt} = a_3 M_1 M_2 \quad (2)$$

$$\text{где } a_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1 I_3}, \quad a_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1}, \quad a_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2}$$

или же вид системы 3-х уравнений для трех компонент угловой скорости.

$$I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} = (I_2 - I_3) \Omega_2 \Omega_3, \quad I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} = (I_3 - I_1) \Omega_3 \Omega_1, \quad I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} = (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2$$

Замечание. Если на тело действуют внешние силы, сумма моментов которых относительно O равна $\mathcal{M}$ в неподвижной системе координат и $\mathcal{N}$ в подвижной ($\mathcal{M} = B\mathcal{N}$), то

$$\dot{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$$

и уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{dM}{dt} = [M, \Omega] + \mathcal{N}.$$

Займемся теперь исследованием решений уравнения Эйлера (2).

ЛЕММА. Уравнение Эйлера имеет два квадратичных первых интеграла:

$$2E = \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} \quad \text{и} \quad M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$$

Доказательство. E сохраняется по закону сохранения энергии, а M^2 — по закону сохранения момента $\mathcal{M}$, так как

$m^2 = M^2 = M^2$. Лемма доказана.

Итак, M лежит на пересечении эллипсоида со сферой. чтобы разобраться в строении кривых пересечения, зафиксируем эллипсоид $E > 0$ и будем менять радиус сферы M .

предположим, для определенности, что $I_1 > I_2 > I_3$. полуоси эллипсоида будут $\sqrt{2EI_1} > \sqrt{2EI_2} > \sqrt{2EI_3}$. Если радиус сферы M меньше меньшей полуоси или больше большей ($M < \sqrt{2EI_3}$ или $M > \sqrt{2EI_1}$), то пересечение пусто, и таким значениям E и M никакое действительное движение не отвечает.

Если радиус сферы равен малой полуоси, то пересечение состоит из двух точек. При увеличении радиуса ($\sqrt{2EI_3} < M < \sqrt{2EI_2}$) получаются две кривые вокруг концов малой полуоси. Точно также если радиус сферы равен большой полуоси, получаются ее концы, а если немного меньше - то две близкие к концам большой полуоси замкнутые кривые. Наконец, если $M = \sqrt{2EI_2}$, пересечение состоит из двух окружностей.

Каждый из 6 концов полуосей эллипсоида есть отдельная траектория уравнений Эйлера (2) - стационарное положение вектора M .

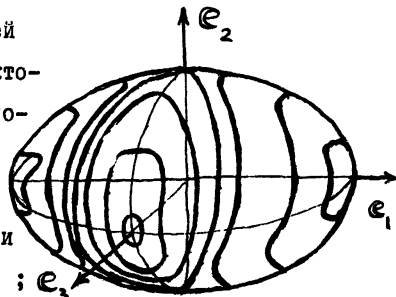
Ему соответствует постоянное

значение вектора угловой скорости

вдоль одной из осей инерции $e_1; e_2; e_3$

при этом Ω остается все время коллинеарным M .

Поэтому вектор угловой скорости сохраняет свое положение в пространстве, ω , коллинеарным m : тело просто вращается с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной в прост-



ранстве оси инерции e_i .

Определение. Движение тела, при котором его угловая скорость остается постоянной ($\omega = \text{const}$, $\Omega = \text{const}$) называется стационарным вращением.

Доказана

ТЕОРЕМА. Твердое тело закрепленное в точке O допускает стационарное вращение вокруг любой из трех своих осей инерции

e_1, e_2, e_3 .

Если, как мы предполагали, $I_1 > I_2 > I_3$, правая часть уравнения Эйлера больше нигде в O не обращается, т.е. других стационарных вращений нет.

Исследуем теперь устойчивость стационарных решений уравнения Эйлера (по Ляпунову).

ТЕОРЕМА. Стационарные решения $M = M_1 e_1$ и $M = M_3 e_3$ уравнений Эйлера, соответствующие большей и меньшей осям инерции устойчивы, а решение, соответствующее средней оси ($M = M_2 e_2$) неустойчиво.

Действительно, при малом отклонение начального условия от $M_1 e_1$ или $M_3 e_3$ траектория будет мало замкнутой кривой, а при малом отклонении от $M_2 e_2$ - большой.

Задача. Устойчивы ли по Ляпунову стационарные вращения тела вокруг большой и малой оси инерции?

Ответ: нет.

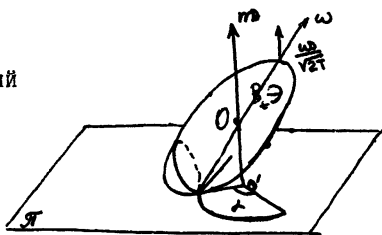
Итак, мы хорошо представляем себе движение векторов момента и угловой скорости в теле (M и Ω) - оно периодически, если $M \neq \sqrt{2} E I_2$.

Чтобы увидеть, как вращается тело в пространстве, рассмотрим его эллипсоид инерции

$$\mathcal{E} = \{ \Omega : (A\Omega, \Omega) = 1 \} \subset K$$

где $A: \Omega \rightarrow M$ — симметрический оператор инерции тела относительно O .

В каждый момент времени эллипсоид $\mathcal{E}$ занимает в неподвижном пространстве k положение $B_t \mathcal{E}$.



ТЕОРЕМА (Пуансо).

Эллипсоид инерции катится без скольжения по неподвижной плоскости, перпендикулярной вектору момента m .

Доказательство. Рассмотрим плоскость π , перпендикулярную вектору момента m и касательную к эллипсоиду инерции $B_t \mathcal{E}$. Таких плоскостей всего две, и в точке касания нормаль к эллипсоиду параллельна m .

Но эллипсоид инерции $\mathcal{E}$ имеет в точке Ω нормаль $\text{grad}(A\Omega, \Omega) = 2A\Omega = 2M$. Поэтому в точках $\pm \frac{\omega}{\sqrt{2T}}$ пересечения оси ω с $B_t \mathcal{E}$ нормаль к $B_t \mathcal{E}$ как раз коллинеарна m .

Итак, плоскость π касается $B_t \mathcal{E}$ в точках на мгновенной оси вращения $\pm \frac{\omega}{\sqrt{2T}}$. Но скалярное произведение с неподвижным вектором m , $\pm \frac{1}{\sqrt{2T}}(m, \omega) = \pm \sqrt{2T}$, постоянно. Итак, расстояние плоскости π от O не меняется, т.е. плоскость π неподвижна.

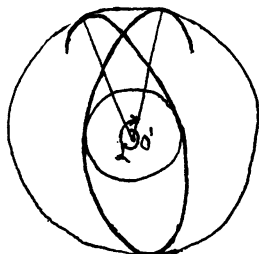
Так как точка касания лежит на мгновенной оси вращения, ее скорость равна 0. Значит эллипсоид $B_t \mathcal{E}$ катится по π без скольжения, и теорема доказана.

Следствие. При близких к стационарному вращению вокруг большой (или малой) оси инерции начальных условиях угловая

скорость остается всегда близкой к своему начальному положению. не только в теле (Ω) но и в пространстве (ω).

Рассмотрим теперь траекторию точки касания на неподвижной плоскости π . Когда на эллипсоиде точка касания сделает полный оборот, начальные условия повторятся с той лишь разницей, что тело повернется на некоторый угол α вокруг оси m . Второй оборот будет в точности подобен первому; если $\alpha = 2\pi \frac{p}{q}$, движение в целом периодически, если же угол α несоизмерим с 2π , то тело никогда не вернется в исходное состояние.

Точка касания замечает при этом на плоскости π всюду плотно кольцо с центром в O' .



Задача. Докажите, что инвариантные двумерные многообразия

V_c (лекция 2I) в шестимерном пространстве $TSO(3)$ -торы,

и на них можно выбрать координаты $\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi$ так, чтобы

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1(c), \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2(c).$$

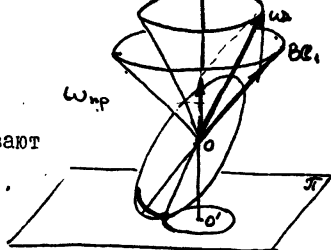
Указание. За φ_1 принять фазу периодического изменения M .

Рассмотрим важный частный случай, когда эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения: $I_2 = I_3 \neq I_1$.

В этом случае ось эллипсоида $B_1 e_1$, мгновенная ось вращения ω и вектор момента m всегда лежат в одной плоскости. Углы между ними и величина вектора ω сохраняются, точка касания описывает и на эллипсоиде, и на плоскости

окружности; оси вращения (ω) и симметрии ($B_z e_z$) с одинаковой угловой скоростью описывают конуса вокруг вектора момента m .

Это движение вокруг m называется прецессией.



Задача. найти угловую скорость прецессии.

Ответ: Разложим вектор угловой скорости ω по направлениям векторов момента m и оси тела $B_z e_z$. Первая компонента и даст угловую скорость прецессии $\omega_{np} = \frac{M}{I_z}$

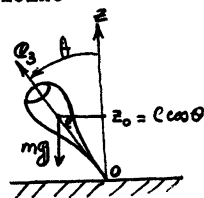
Указание. Представить движение тела в виде произведения поворота вокруг оси момента и последующего поворота вокруг оси тела. Угловая скорость произведения обоих движений равна сумме векторов их угловых скоростей.

ЛЕКЦИЯ 23. ВОЛЧОК ЛАГРАНЖА

Рассмотрим твердое тело, закрепленное в неподвижной точке O и подверженное действию сил веса $m\mathbf{g}$. Задача о движении такого "тяжелого" ^{твердого} тела в общем случае до сих пор не решена и в некотором смысле неразрешима. В этой задаче с 3 степенями свободы известны лишь 2 первых интеграла: интеграл энергии $E = T + U$ и проекция кинетического момента на вертикаль, M_z .

Есть важный частный случай, когда задачу можно полностью решить — случай симметричного волчка.

Симметричным или Лагранжевым волчком называют закрепленное в неподвижной точке O твердое тело, у которого эллипсоид инерции в O есть эллипсоид вращения и центр тяжести лежит на оси вращения, e_3 .



В этом случае, поворот вокруг оси e_3 не меняет функции Лагранжа, и по теореме Нётер должен существовать дополнительный к E и M_z первый интеграл; им оказывается проекция M_3 вектора момента на ось e_3 .

Если удастся ввести 3 координаты так, чтобы среди них были углы вращения вокруг оси z и вокруг оси волчка, то эти координаты будут циклическими, и задача с тремя степенями свободы сведется к задаче с одной степенью свободы (для третьей координаты).

Такой выбор координат в конфигурационном пространстве $SO(3)$ возможен; эти координаты φ, χ, θ называются углами Эйлера и образуют в $SO(3)$ локальную систему координат,

подробную географическим координатам на сфере: с особенностями у полюсов и многозначностью на одном меридиане.

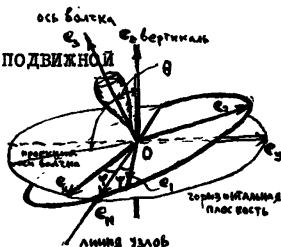
Введем следующие обозначения:

e_x, e_y, e_z - орты правой декартовой неподвижной системы координат в неподвижной точке O .

e_1, e_2, e_3 - орты связанной с телом правой подвижной системы координат, направленные по осям инерции тела в O .

I_1, I_2, I_3 - моменты инерции тела в точке O .

e_N орт оси $[e_2, e_3]$, называемой "линия узлов" (Все вектора - в "неподвижном пространстве" k). Чтобы перевести неподвижный репер e_x, e_y, e_z в подвижный e_1, e_2, e_3 , нужно выполнить три поворота.



1) на угол φ вокруг оси e_z . При этом e_z остается на месте, а e_x переходит в e_N .

2) на угол θ вокруг оси e_N . При этом e_z переходит в e_3 а e_N остается на месте.

3) на угол ψ вокруг оси e_3 . При этом e_N переходит в e_1 , а e_3 остается на месте.

В результате всех трех вращений e_x переходит в e_1 , а e_z в e_3 , поэтому e_y переходит в e_2 .

Углы φ, ψ, θ называются углами Эйлера. Легко доказывается

ТЕОРЕМА. Каждой тройке чисел φ, θ, ψ предыдущая конструкция сопоставляет вращение трехмерного пространства,

$B(\varphi, \theta, \psi) \in SO(3)$, переводящее репер e_x, e_y, e_z в репер e_1, e_2, e_3 . При этом отображение $(\varphi, \theta, \psi) \rightarrow B(\varphi, \theta, \psi)$ задает локальные координаты

$$0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 < \psi < 2\pi, \quad 0 < \theta < \pi$$

в конфигурационном пространстве волчка, $SO(3)$.

Подобно географической долготе, φ и ψ можно считать углами $\bmod 2\pi$; при $\theta = 0$ или $\theta = \pi$ отображение $\varphi, \theta, \psi \rightarrow B$ имеет особенность типа полюса..

Выразим функцию Лагранжа через координаты φ, θ, ψ и их производные.

Потенциальная энергия, очевидно, равна

$$U = \iiint z g dm = mg z_0 = mgl \cos \theta$$

где z_0 - высота центра тяжести над 0.

Чтобы сосчитать кинетическую энергию, рассмотрим скорость точки волчка, занимающей в момент времени t положение Z . Через время dt эта точка займет положение (с точностью $do(dt)^2$)

$$B(\varphi + d\varphi, \theta + d\theta, \psi + d\psi) B^{-1}(\varphi, \theta, \psi) Z \\ \text{где } d\varphi = \dot{\varphi} dt, d\theta = \dot{\theta} dt, d\psi = \dot{\psi} dt$$

Следовательно, с той же точностью вектор перемещения есть сумма трех слагаемых

$$B(\varphi + d\varphi, \theta, \psi) B^{-1}(\varphi, \theta, \psi) Z - Z = [\omega_\varphi, Z] dt$$

$$B(\varphi, \theta + d\theta, \psi) B^{-1}(\varphi, \theta, \psi) Z - Z = [\omega_\theta, Z] dt$$

$$B(\varphi, \theta, \psi + d\psi) B^{-1}(\varphi, \theta, \psi) Z - Z = [\omega_\psi, Z] dt$$

(угловые скорости ω_φ , ω_θ и ω_ψ определены этими формулами) .

Поэтому скорость точки Z есть $V = [\omega_\varphi + \omega_\theta + \omega_\psi, Z]$.

Итак, угловая скорость тела есть

$$\omega = \omega_\varphi + \omega_\theta + \omega_\psi$$

где слагаемые определены предыдущими формулами.

Так как нам известно выражение

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2)$$

кинетической энергии через компоненты разложения вектора ω по осям инерции e_1, e_2, e_3 , то остается разложить по этим осям вектора ω_φ , ω_θ и ω_ψ .

Здесь полезна маленькая хитрость: рассмотрим частный случай, когда $\varphi = \psi = 0$. В этом случае, как легко видеть,

$$B(\varphi + d\varphi, \theta, \psi) B^{-1}(\varphi, \theta, \psi)$$

есть просто вращение вокруг оси e_2 на угол $d\varphi$, так что

$$\omega_\varphi = \dot{\varphi} e_2$$

Далее, $B(\varphi, \theta + d\theta, \psi) B^{-1}(\varphi, \theta, \psi)$ есть в случае $\varphi = \psi = 0$ просто вращение вокруг оси $e_N = e_x = e_1$ на угол $d\theta$, так что

$$\omega_\theta = \dot{\theta} e_1$$

Наконец, $B(\varphi, \theta, \psi + d\psi)$ есть вращение на угол вокруг оси e_3 , поэтому

$$\omega_\psi = \dot{\psi} e_3$$

Окончательно, при $\varphi = \psi = 0$ получаем

$$\omega = \dot{\varphi} e_2 + \dot{\theta} e_1 + \dot{\psi} e_3$$

Но очевидно при $\varphi = \psi = 0$

$$e_2 = e_3 \cos \theta + e_2 \sin \theta$$

Итак, компоненты угловой скорости по осям инерции e_1, e_2, e_3 суть

$$\vec{\omega}_1 = \dot{\theta}, \quad \omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta, \quad \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta$$

а кинетическая энергия при $\varphi = \psi = 0$ дается формулой

$$T = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2$$

Но кинетическая энергия от φ и ψ зависеть не может: это циклические координаты, и ничего не меняющим выбором начала отсчета φ и ψ мы всегда можем сделать $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Итак, полученная формула для кинетической энергии справедлива при всех φ, ψ .

Мы получаем, таким образом, функцию Лагранжа

$$L = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - m g l \cos \theta$$

циклическим координатам φ, ψ соответствуют первые интегралы

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = M_1 \dot{\varphi} (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) + \dot{\psi} I_3 \cos \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = M_2 = \dot{\psi} I_3 \cos \theta + \dot{\varphi} I_3$$

В соответствии с общей теорией, выразим $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ через M_1 и M_2 . Получим полную энергию системы в виде

$$E = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{M_1^2}{2 I_1} + m g l \cos \theta + \frac{(M_2 - M_1 \cos \theta)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta}$$

и

$$\dot{\varphi} = \frac{M_2 - M_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$$

Итак, доказана.

ТЕОРЕМА. Наклон θ оси волчка к вертикали меняется так же, как в одномерной системе с энергией

$$E' = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + U_{\text{эфф}}(\theta)$$

где эффективная потенциальная энергия дается формулой

$$U_{\text{эфф}} = \frac{(M_2 - M_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta$$

(мы оторосили постоянный по θ член $\frac{M_3^2}{2I_3} = E - E'$).
Чтобы изучить полученную одномерную систему, удобно сделать замену $\cos \theta = u$ ($-1 \leq u \leq 1$).

Обозначая кроме того

$$\frac{M_2}{I_1} = \alpha, \quad \frac{M_3}{I_1} = \beta, \quad \frac{2E'}{I_1} = \alpha, \quad \frac{2mgl}{I_1} = \beta > 0$$

мы можем переписать закон сохранения энергии E' в виде

$$\dot{u}^2 = f(u), \quad \text{где} \quad f(u) = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (\alpha - \beta u)^2$$

и закон изменения азимута. φ в виде

$$\dot{\varphi} = \frac{\alpha - \beta u}{1 - u^2}$$

Заметим, что $f(u)$ — полином 3 степени, $f(+\infty) = +\infty$, а

$f(\pm 1) = -(\alpha \mp \beta)^2 < 0$ если только $\alpha \neq \pm \beta$. С другой

стороны, действительному движению отвечают лишь такие постоянные a, b, α, β при которых $f(u) \geq 0$ при некоторых $-1 \leq u \leq 1$.

Итак, $f(u)$ имеет ровно 2 вещественных корня u_1, u_2 на отрезке $-1 \leq u \leq 1$ (и один при $u > 1$).

Следовательно, наклон оси волчка, θ , меняется периодически между двумя предельными значениями θ_1, θ_2 .

Это периодическое изменение наклона называется нутацией.

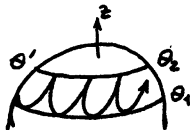
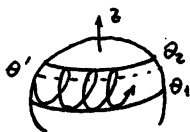
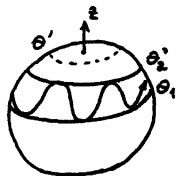
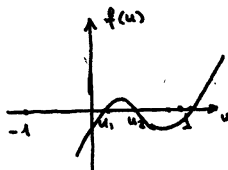
Рассмотрим теперь движение оси волчка по азимуту. Точка пересечения оси с единичной сферой движения в кольце между параллелями θ_1 и θ_2 . При этом изменение азимута оси определяется уравнением

$$\dot{\varphi} = \frac{a - bu}{1 - u^2}$$

Если корень $u' = \frac{a}{b}$ уравнения $a = bu$ лежит вне (u_1, u_2) угол φ меняется монотонно и ось чертит на единичной сфере кривую типа синусоиды.

Если корень $u' = \frac{a}{b}$ уравнения $a = bu$ лежит внутри (u_1, u_2) , то скорость изменения φ на параллелях θ_1 и θ_2 противоположна, и ось чертит на сфере кривую с петлями.

Если же корень $u' = \frac{a}{b}$ уравнения $a = bu$ лежит на краю



(скажем $u' = u_2$), то ось чертит кривую с острями.

Последний случай, хотя и исключительный, наблюдается всякий раз, когда мы отпускаем ось запущенного с наклоном θ_2 волчка без начальной скорости: волчок сперва падает, но потом вновь поднимается.

Азимутальное движение оси волчка называется прецессией. Окончательно, движение волчка состоит из вращения вокруг собственной оси, нутации и прецессии. Каждое из 3-х движений имеет свою частоту.

ЛЕКЦИЯ 24

СПЯЩИЙ ВОЛЧОК И БЫСТРЫЙ ВОЛЧОК

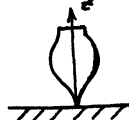
Полученные в прошлой лекции формулы сводят решение уравнений движения волчка к эллиптическим квадратурам. Однако ка-
чественные выводы о движении обычно проще получать, не обращаясь
к этим квадратурам.

Рассмотрим сперва частное решение уравнений движения, при
котором ось волчка все время вертикальна (~~$\theta = 0$~~) и угловая
скорость постоянна ("спящий волчок"). В этом случае, очевидно,

$$M_2 = M_3 = I_3 \omega_3$$

Задача. Показать, что стационарное вращение вокруг вер-
тикали всегда неустойчиво по Ляпунову.

Мы рассмотрим движение оси волчка, а
не самого волчка. Будет ли ось волчка устойчива
оставаться вблизи вертикали, т.е. будет ли θ оставаться ма-
лым?



Разложим эффективную потенциальную энергию системы

$$U_2 = \frac{(M_2 - M_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta$$

в ряд по степеням θ Находим

$$U_2 = \frac{I_3^2 \omega_3^2}{2I_1} \frac{\theta^4}{\theta^2} + \dots + mgl \frac{\theta^2}{2} + \dots = C + A\theta^2 + \dots, A = \frac{\omega_3^2 I_3^2}{8I_1} - \frac{mgl}{2}$$

Если $A > 0$, положение равновесия $\theta = 0$ одномерной системы
устойчиво, а если $A < 0$ — неустойчиво. Итак, условие устойчи-
вости имеет вид

$$\omega_3^2 \geq \frac{4mgl I_1}{I_3^2}$$

Когда трение уменьшает скорость спящего волчка ниже этого предела, он просыпается.

Задача. Докажите, что при $\omega_3^2 > \frac{4mgeI_1}{I_3^2}$ ось спящего волчка устойчива и относительно таких возмущений, которые меняют значения M_2 , M_3 , а не только θ .

Перейдем теперь к другому важному случаю движения волчка — т.н. быстрому волчку.

Определение. Волчок называется быстрым, если кинетическая энергия его вращения велика по сравнению с потенциальной:

$$\frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \gg mge.$$

Из соображений подобия ясно, что увеличение угловой скорости в $\sqrt{N}$ раз в точности эквивалентно уменьшению веса в $\sqrt{N^2}$ раз. Точнее, справедлива

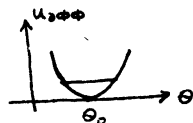
ТЕОРЕМА. Если, сохраняя начальное положение волчка, увеличить в $\sqrt{N}$ раз угловую скорость, то траектория волчка будет в точности такой же, как если бы угловая скорость осталась прежней, а ускорение силы тяжести g уменьшилось в N^2 раз. При этом в случае большей угловой скорости траектория, разумеется, проходит в $\sqrt{N}$ раз быстрее.

Таким образом, мы можем исследовать случай $g \rightarrow 0$, а полученные результаты истолковывать и для случая $\omega \rightarrow \infty$.

Рассмотрим сперва случай $g = 0$, т.е. движение симметричного волчка в отсутствие силы тяжести. Сравним два описания этого движения: по Пуансо (лекция 22) и по Лагранжу (лекция 23).

Эффективный потенциал в отсутствие силы тяжести сводится

$$U_{\text{эфф.}} = \frac{(M_2 - M_3 \cos \theta)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta}$$



Эта нестрого положительная функция имеет нулевой минимум

при θ_0 , определенном условием $M_2 = M_3 \cos \theta_0$.

Итак, угол наклона θ_0 оси волчка

к вертикали — устойчивый стационарный: при малом отклонении начального наклона θ от θ_0 будут происходить периодические колебания θ около θ_0 (нута́ция). Частоту этих колебаний легко определить по общей формуле: частота малых колебаний в одномерной системе с энергией

$$E = \frac{a \dot{x}^2}{2} + U(x) \quad U(x_0) = \min U(x)$$

определяется формулой (лекция)

$$\omega^2 = \frac{U''(x_0)}{a}$$

Энергия одномерной системы, описывающей колебания наклона оси волчка, есть

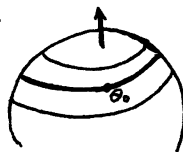
$$\frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + U_{\text{эфф.}}$$

при $\theta = \theta_0 + x$ находим $M_2 - M_3 \cos \theta = M_3 (\cos \theta_0 - \cos(\theta_0 + x)) =$
 $= M_3 x \sin \theta_0 + O(x^2)$

$$U_{\text{эфф.}} = \frac{M_3^2 x^2 \sin^2 \theta_0}{2 I_1 \sin^2 \theta_0} + O(x^2) = \frac{I_3 \omega_3^2}{2 I_1} x^2 + \dots$$

Итак, получаем для частоты нута́ции выражение

$$\omega_{\text{нут.}} = \frac{I_3 \omega_3}{I_1}$$



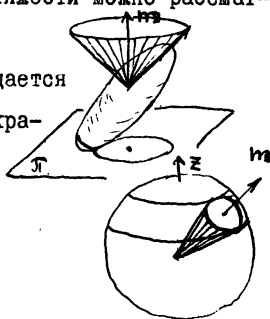
Из формулы $\dot{\varphi} = \frac{M_2 - M_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$ видно, что при $\theta = \theta_0$

азимут оси также не меняется со временем: ось неподвижна. Азимутальное движение оси при малом отклонении θ от θ_0 можно было бы также изучить с помощью этой формулы, но мы поступим иначе.

Движение волчка в отсутствии силы тяжести можно рассматривать как движение по Пуансо.

Следовательно, ось волчка равномерно вращается вокруг вектора кинетического момента, сохраняющего свое положение в пространстве.

Итак, ось волчка описывает на сфере окружность, центр которой соответствует вектору кинетического момента.



Замечание. Таким образом, то движение оси волчка, которое по Лагранжу называется нутацией, в описании движения Пуансо называется прецессией.

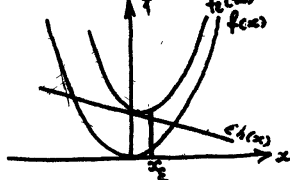
Разумеется, полученная выше формула для частоты малой нутации $\omega_{\text{нут}} = \frac{I_3 \omega_3}{I_1}$ согласуется с формулой частоты прецессии $\omega = \frac{M}{I_1}$ в движении по Пуансо: когда амплитуда нутации стремится к 0, $I_3 \omega_3 \rightarrow M$.

Перейдем теперь к случаю, когда сила веса не отсутствует, но очень мала (при этом значения M_2 , M_3 фиксированы). В этом случае к эффективной потенциальной энергии добавляется слагаемое $mg\ell \cos \theta$, малое вместе с производными.

ЛЕММА. Пусть функция $f(x)$ имеет минимум при $x=0$ и Тейлоровское разложение $f(x) = A \frac{x^2}{2} + \dots$, $A > 0$. Пусть функция $h(x)$ имеет в 0 Тейлоровское разложение $h(x) = B + Cx + \dots$. Тогда при достаточно малом ε функция $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon h(x)$ имеет минимум в близкой к 0

точке

$$x_\varepsilon = \frac{C\varepsilon}{A} + O(\varepsilon^2)$$



при этом $f_\varepsilon''(x_\varepsilon) = A + O(\varepsilon)$

Действительно, имеем $f_\varepsilon'(x) = Ax + C\varepsilon + O(x^2)$, и результат получается применением к $f_\varepsilon'(x)$ теоремы о неявной функции.

Согласно лемме, эффективная потенциальная энергия при малых g имеет близкую к θ_0 точку минимума θ_g , причем в этой точке u'' мало отличается от $u''(\theta_0)$. Следовательно, частота малой нутации около θ_0 близка к полученному при $g=0$ значению:

$$\lim_{g \rightarrow 0} \omega_{\text{н.т.}} = \frac{I_2}{I_1} \omega_0$$

Рассмотрим теперь специальные начальные условия, когда мы отпускаем ось волчка без начального толчка из положения с наклоном

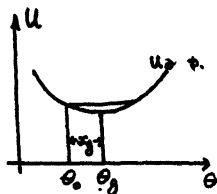
θ_0 к вертикали: $\psi(0) = \dot{\psi}(0) = 0$, $\theta(0) = \theta_0$, так что

$$M_z = M_3 \cos \theta_0.$$

в этом случае, как мы уже знаем из лекции 23, ось волчка чертила на сфере кривую с острями.

Чтобы применить лемму к нахождению точки минимума θ_g эффективной потенциальной энергии, положим снова

$$\theta = \theta_0 + x, \quad \cos \theta = \cos \theta_0 - x \sin \theta_0 + \dots$$



Тогда получим, как выше, Тейлоровские разложения по x

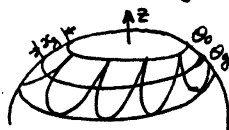
$$u_{\text{эф.}}|_{g=0} = \frac{I_2^2 \omega_0^2}{2I_1} x^2 + \dots, \quad mgl \cos \theta = mgl \cos \theta_0 - x mgl \sin \theta_0.$$

Применяя лемму к $f = u_{\text{эфф}}|_{g=0}$, $g = \epsilon$, $h = m\ell \cos(\theta_0 + \alpha)$, находим, что минимум эффективной потенциальной энергии $u_{\text{эфф}}$ достигается при угле наклона

$$\theta_g = \theta_0 + \alpha_g, \quad \alpha_g = \frac{I_1 m \ell \sin \theta_0}{I_3^2 \omega_3^2} g + O(g^2)$$

Итак, наклон оси волчка θ будет колебаться около θ_g . Но в начальный момент $\theta = \theta_0$, а $\dot{\theta} = 0$. Значит θ_0 соответствует наивысшему положению оси волчка. Итак, при малых g амплитуда нутации асимптотически равна

$$a_{\text{нут}} \sim \alpha_g \sim \frac{I_1 m \ell \sin \theta_0}{I_3^2 \omega_3^2} g \quad (g \rightarrow 0)$$



Теперь найдем прецессионное движение оси. Из общей формулы

$$\dot{\psi} = \frac{M_z - M_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$$

при $M_z = M_3 \cos \theta_0$, $\theta = \theta_0 + \alpha$, находим $M_z - M_3 \cos \theta = M_3 \alpha \sin \theta_0 + \dots$, поэтому

$$\dot{\psi} = \frac{M_3}{I_1 \sin \theta_0} \alpha + \dots$$

Но α колеблется от 0 до $2\alpha_g$ гармонически (с точностью до $O(g^2)$). Поэтому среднее за период нутации значение скорости прецессии асимптотически равно

$$\overline{\dot{\psi}} \sim \frac{M_3}{I_1 \sin \theta_0} \alpha_g \sim \frac{m g \ell}{I_3 \omega_3} \quad (g \rightarrow 0)$$

Задача. Доказать аккуратно, что

$$\lim_{g \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(t) - \psi(0)}{\frac{m g \ell}{I_3 \omega_3}} = 1.$$

Перейдем теперь к случаю, когда $\mathcal{g}$ постоянно, а начальная угловая скорость ω_3 очень велика (быстрый волчок).

Истолковывая с помощью подобия наши результаты, получаем:

ТЕОРЕМА. Если в начальный момент ось волчка неподвижна ($\psi = \dot{\theta} = 0$), и волчок быстро вращается вокруг своей оси ($\omega_3 \rightarrow \infty$), наклоненной к вертикали под углом θ_0 , то асимптотически

- 1) частота нутации пропорциональна угловой скорости
 - 2) амплитуда нутации обратно пропорциональна квадрату угловой скорости
 - 3) частота прецессии обратно пропорциональна угловой скорости
- и справедливы асимптотические формулы (при $\omega_3 \rightarrow \infty$)

$$\omega_{\text{нут}} \sim \frac{I_3}{I_1} \omega_3, \quad a_{\text{нут}} \sim \frac{I_1 m g l}{I_3^2 \omega_3^2} \sin \theta_0, \quad \omega_{\text{прец}} \sim \frac{m g l}{I_3 \omega_3}$$

(здесь $f(\omega_3) \sim g(\omega_3)$, если $\lim_{\omega_3 \rightarrow \infty} \frac{f}{g} = 1$).

Подп. к печати 19/У-87г. Л-41965. Ф. 60х90 1/16
Физ.п.л. 3,0. Уч.-изд.л. 2,04. Зак. 1373. Тир. 650

Цена 6 коп.

Отпечатано на ротационных в тип. Изд-ва МГУ
Москва, Ленинские горы.

Цена 6 коп